(1)
$$f'(x)=\frac{2(\log x)^{2-1}\cdot(\log x)'\cdot x-(\log x)^2}{x^2}$$
$$=\frac{2\log x\cdot\dfrac{1}{x}\cdot x-(\log x)^2}{x^2}$$
$$=\frac{\log x(2-\log x)}{x^2}$$

$f'(x)=0$ とすると

$$\log x=0,\ 2$$

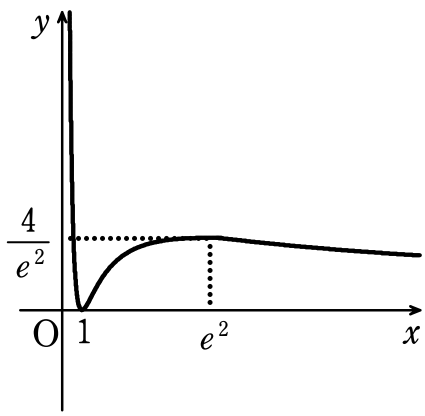
よって,

$$x=1,\ e^2$$

$x>0$ における $f(x)$ の増減表は以下となる.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	e^2	$\cdots$
$f'(x)$	／	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	／	↘	0	↗	$\dfrac{4}{e^2}$	↘

また, $\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ であるから, 曲線C の概形は下の図となる.



(2)
$$f''(x)=\frac{\left\{\dfrac{1}{x}(2-\log x)+\log x\cdot\left(-\dfrac{1}{x}\right)\right\}x^2-\log x(2-\log x)\cdot 2x}{x^4}$$
$$=\frac{(2-2\log x)-2\log x(2-\log x)}{x^3}$$
$$\frac{2}{x^3}\left\{(\log x)^2-3\log x+1\right\}$$

$f''(x)=0$ とすると,

$$\frac{2}{x^3}\left\{(\log x)^2-3\log x+1\right\}=0$$

$$(\log x)^2-3\log x+1=0$$

$$\log x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

$\log a=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$，$\log b=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ とすると，$0<a<b$ であり、かつ $f''(a)=f''(b)=0$ となり，

$0<x<a$，$b<x$ のとき　$f''(x)>0$

$a<x<b$ のとき　$f''(x)<0$

よって，C は 2 つの変曲点をもち，その変曲点の x 座標が a，b であり.

すなわち

$$\log\alpha=\frac{3-\sqrt{5}}{2},\ \log\beta=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

となる.

(3)　$x>0$ において $f(x)>0$ であるから，求める面積を S とすると

$$S=\int_\alpha^\beta\frac{(\log x)^2}{x}dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(\log x)^3\right]_\alpha^\beta$$

$$=\frac{1}{3}\left\{(\log\beta)^3-(\log\alpha)^3\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\left\{(\log\beta-\log\alpha)^3+3\log\beta\cdot\log\alpha(\log\beta-\log\alpha)\right\}$$

(2)より $\log\beta-\log\alpha=\sqrt{5}$，$\log\beta\cdot\log\alpha=1$ なので，

$$S=\frac{1}{3}\left\{\left(\sqrt{5}\right)^3+3\cdot1\cdot\sqrt{5}\right\}$$

$$=\frac{8\sqrt{5}}{3}$$

となる.

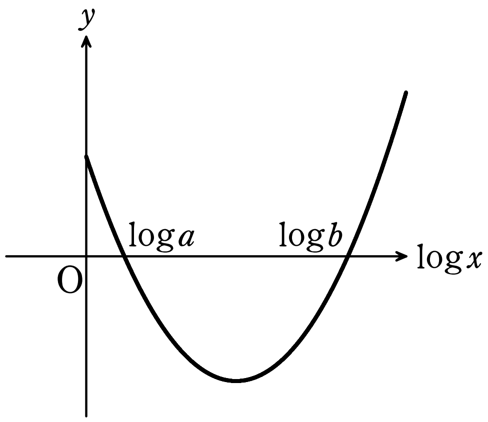
【参考 1】(2)関数の微分

$f'(x)=\dfrac{f(x)g(x)}{h(x)}$ とすると，

$$f''(x) = \frac{\left\{f(x)g(x)\right\}' h(x) - f(x)g(x)h'(x)}{\left\{h(x)\right\}^2}$$
$$= \frac{\left\{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\right\} h(x) - f(x)g(x)h'(x)}{\left\{h(x)\right\}^2}$$

となる考え方を利用した

【参考 2】(2)正負の判断



$\log x$の関数としてとらえると，関数の正負の判断は$y = x^2 - 3x + 1$のグラフを考えると変わらない．よって，$0 < \log x < a$, $\log x > \log b$では値が 0 よりも大きくなっている。また，$\log a < \log x < \log b$では値が 0 よりも小さくなっている。このグラフから、正負を判断すると、イメージがつきやすい。