(1) $a_2=\dfrac{8a_1-1}{25a_1-2}=\dfrac{4-1}{\dfrac{25}{2}-2}=\dfrac{6}{21}=\dfrac{2}{7}$

$a_3=\dfrac{8a_2-1}{25a_2-2}=\dfrac{\dfrac{16}{7}-1}{\dfrac{50}{7}-2}=\dfrac{\dfrac{9}{7}}{\dfrac{36}{7}}=\dfrac{3}{12}=\dfrac{1}{4}$

$a_4=\dfrac{8a_3-1}{25a_3-2}=\dfrac{2-1}{\dfrac{25}{4}-2}=\dfrac{1}{\dfrac{17}{4}}=\dfrac{4}{17}$

$a_5=\dfrac{8a_4-1}{25a_4-2}=\dfrac{\dfrac{32}{17}-1}{\dfrac{100}{17}-2}=\dfrac{\dfrac{15}{17}}{\dfrac{66}{17}}=\dfrac{5}{33}$

(2) $a_n=\dfrac{n}{2+(n-1)\cdot 5}=\dfrac{n}{5n-3}$ $\cdots$(※) となると推測できる.

[1] $n=1$ のとき

$a_1=\dfrac{1}{5\cdot 1-3}=\dfrac{1}{2}$ より (※) は成り立つ.

[2] $n=k$ (k : 自然数) のとき

$a_k=\dfrac{k}{5k-3}$

が成り立つと仮定する.

$$a_{k+1}=\frac{8a_k-1}{25a_k-2}=\frac{8\cdot\dfrac{k}{5k-3}-1}{25\cdot\dfrac{k}{5k-3}-2}=\frac{8k-(5k-3)}{25k-(10k-6)}=\frac{3(k+1)}{3(5k+2)}=\frac{k+1}{5(k+1)-3}$$

よって, $n=k+1$ のときも (※) は成り立つ.

[1][2] よりすべての自然数 n で $a_n=\dfrac{n}{5n-3}$