出典

2012 年　新潟大学

ポイント

(1)　**単調増加性のみしか記述しない場合は得点がなくなるので要注意(最小値の記述が必要)**

(2)(3)　**力技で解けない。☞前問が利用できるように考える。**

(1)　$x \geqq 0$ **に対して，** $f(x) = \log(1+x) - x$ **とおくと，**

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1$$
$$= -\frac{x}{1+x} \leqq 0$$

よって， $f(x) \leqq f(0) = 0$ **から，** $\log(1+x) \leqq x \quad \cdots ①$

$x \geqq 0$ **に対して，** $g(x) = \log(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2$ **とおくと，**

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x} \geqq 0$$

よって， $g(x) \geqq g(0) = 0$ **から，**

$$\log(1+x) \geqq x - \frac{1}{2}x^2 \quad \cdots ②$$

①②より，

$$x - \frac{1}{2}x^2 \leqq \log(1+x) \leqq x$$

(2)　(1)**より，**

$$\int_0^{\frac{1}{n}} \left(x - \frac{1}{2}x^2 \right) dx \leqq \int_0^{\frac{1}{n}} \log(1+x)\, dx \leqq \int_0^{\frac{1}{n}} x\, dx$$

となり，

$$n^2 \int_0^{\frac{1}{n}} \left(x - \frac{1}{2}x^2 \right) dx \leqq a_n \leqq n^2 \int_0^{\frac{1}{n}} x\, dx$$

ここで，

$$n^2 \int_0^{\frac{1}{n}} \left(x - \frac{1}{2}x^2 \right) dx = n^2 \left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{6}x^3 \right]_0^{\frac{1}{n}}$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{6n}$$

$$n^2\int_0^{\frac{1}{n}} xdx = \frac{1}{2}$$

より，

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{6n} \leqq a_n \leqq \frac{1}{2}$$

すると，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6n}\right) = \frac{1}{2}$$

から，はさみうちの定理より

$$\underline{\lim_{n\to\infty} a_n = \mathbf{\frac{1}{2}}}$$

(3) (1)より，

$$\frac{k}{n^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{k^2}{n^4} \leqq \log\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leqq \frac{k}{n^2}$$

となり，

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{k^2}{n^4}\right) \leqq \sum_{k=1}^{n}\log\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leqq \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{k^2}{n^4}\right) \leqq b_n \leqq \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}$$

ここで，

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{k^2}{n^4}\right) = \frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2} = \frac{n+1}{2n}$$

より，

$$\frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} \leqq b_n \leqq \frac{n+1}{2n}$$

すると，

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3}\right\} = \frac{1}{2},\ \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$$

から，

$$\underline{\lim_{n\to\infty} b_n = \mathbf{\frac{1}{2}}}$$